

SCENARIUSZ ZAAWANSOWANEGO E-MATERIAŁU

1. Metryczka materiału

Tytuł materiału	Etiudy z geometrii płaskiej
Numer materiału	VI.15
Autorzy scenariusza	Adam Makowski
Weryfikacja WCAG	Zespół ekspertów ds. WCAG (Dominika Gaponiuk, Agnieszka Brodowska, Urszula Grygier, Łukasz Mroziński)
Weryfikacja założeń techniczno-informatycznych	Zespół informatyków ds. integrowania e-materiałów pod względem technologicznym (Paweł, Tomaszek, Katarzyna Gagan, Anna Magdziarz-Tomaszek, Grzegorz Kuszczak)
Weryfikacja językowa	Angelika Wiśniewska
Rodzaj multimedium	wirtualna symulacja
Wykorzystanie AR lub VR AR - rozszerzona rzeczywistość VR - wirtualna rzeczywistość	standardowa 2D lub 3D <input type="checkbox"/> AR <input type="checkbox"/> VR
Etap(y) edukacyjny(e), dla których przeznaczony jest materiał	II etap: SP IV-VIII III etap: Liceum / technikum zakres podstawowy
Przedmiot(y), do nauki których przeznaczony jest materiał	matematyka



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



2. Opis materiału

Skrócony opis materiału (abstrakt)

Aplikacja "Etiudy z geometrii płaskiej" to nowoczesne narzędzie wspierające naukę matematyki i geometrii poprzez interaktywne symulacje, zadania konstrukcyjne oraz wizualizacje zależności geometrycznych i algebraicznych. Składa się z pięciu etiud, które obejmują kluczowe zagadnienia, takie jak konstrukcja prostych i okręgów, zależności między kątami w kole, symetrie geometryczne, wzory skróconego mnożenia oraz uzasadnienie twierdzenia Pitagorasa.

Funkcje aplikacji:

- narzędzia konstrukcyjne i makra: umożliwiają rysowanie figur geometrycznych, tworzenie dynamicznych konstrukcji oraz łatwe i przejrzyste zobrazowanie ciekawych zależności geometrycznych i dowodów z omówieniem.
- dynamiczne wizualizacje: płynne zmiany konstrukcji geometrycznych pozwalają użytkownikowi obserwować relacje i zależności w czasie rzeczywistym.
- wsparcie dydaktyczne: każda etiuda zawiera wersję dostosowaną do różnych poziomów edukacyjnych, w tym klas VII i VIII szkoły podstawowej oraz liceum.

Dostosowanie do poziomu ucznia:

Etiudy 3 i 5 mają warianty specjalnie opracowane dla uczniów starszych klas szkoły podstawowej i liceum, różniąc poziom trudności oraz zakres analizowanych zagadnień.

Aplikacja rozwija umiejętności logicznego myślenia, precyzję w pracy z konstrukcjami geometrycznymi oraz intuicyjne rozumienie dowodów matematycznych.

Cel ogólny materiału

Materiał pozwala na kształcenie umiejętności wykonywania konstrukcji geometrycznych; stawiania hipotez oraz ich uzasadniania lub obalania, co prowadzi do budowania intuicji geometrycznej. Każda jego część realizuje odrębne cele.

Etiuda 1. Proste i okręgi

Zrozumienie wzajemnego położenia dwóch prostych, prostej i okręgu w zależności od długości promienia okręgu i odległości środka okręgu od prostej oraz wzajemne położenie dwóch okręgów w zależności od odległości środków tych okręgów i ich promieni poprzez dynamiczną wizualizację sytuacji.

Etiuda 2. Kąty w kole

Wizualizacja zależności pomiędzy kątami związanymi z okręgiem: środkowym, wpisanym, dopisanym (między styczną i cięciwą). Budowanie intuicji matematycznej w kierunku stawiania hipotez. Wprowadzenie do dowodzenia w geometrii.

Etiuda 3. Symetrie w układzie współrzędnych

Zrozumienie działania symetrii osiowej i środkowej w układzie współrzędnych poprzez płynną obserwację współrzędnych punktów i ich obrazów. Odkrywanie zależności między punktami i ich obrazami w symetrii osiowej i środkowej w układzie współrzędnych.

Etiuda 4. Wzory skróconego mnożenia

Graficzne uzasadnienie wybranych wzorów skróconego mnożenia. Rozbudzenie wyobraźni geometrycznej uczniów.

Etiuda 5. Uzasadnienie twierdzenia Pitagorasa

Nawiązanie do historii i początków matematyki poprzez podkreślenie, że rozwój geometrii był przed algebrą. Graficzne uzasadnienie (dowód) twierdzenia Pitagorasa. Rozbudzenie wyobraźni geometrycznej uczniów.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Cele z podstawy programowej kształcenia ogólnego możliwe do realizacji za pomocą materiału

Szkoła podstawowa

Matematyka (klasy VII-VIII)

Symetrie. Uczeń:

- rozpoznaje figury osiowosymetryczne i wskazuje ich osie symetrii oraz uzupełnia figurę do figury osiowosymetrycznej przy danych: osi symetrii figury i części figury;
- rozpoznaje figury środkowosymetryczne i wskazuje ich środki symetrii.

[realizacja - Etiuda 3]

Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Uczeń:

- zna i stosuje w sytuacjach praktycznych twierdzenie Pitagorasa (bez twierdzenia odwrotnego);

[realizacja - Etiuda 5].

Szkoła ponadpodstawowa

Matematyka (zakres podstawowy)

Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:

- posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);
- znajduje punkty wspólne prostej i okręgu;
- znajduje punkty wspólne dwóch okręgów;

[realizacja - Etiuda 1]

Planimetria. Uczeń:

- stosuje własności kątów wpisanych i środkowych; [realizacja - Etiuda 2.]

Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:

- wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

[realizacja - Etiuda 3]

Wyrażenia algebraiczne. Uczeń

- stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2

[realizacja - Etiuda 4]

3. Charakterystyka materiału

Opis zawartości merytorycznej materiału

Etiuda 1. Proste i okręgi

A. Samodzielne konstrukcje

Użytkownik ma dostęp do podstawowych narzędzi konstrukcyjnych. Ma możliwość rysowania okręgów po wskazaniu środka i promienia oraz rysowania prostych przechodzących przez dwa punkty. Rysowanie okręgu o zadanej długości promienia. Może wyznaczać proste prostopadłe, równoległe, mierzyć odległości punktów (długości odcinków). Skonstruowane obiekty są dynamiczne, można przemieszczać obiekty na ekranie, np. za pomocą "chwywania" za punkty. Użytkownik może samodzielnie konstruować różne położenia dwóch prostych, prostej i okręgu, dwóch okręgów. Może mierzyć odległości punktów (np. środków okręgów) oraz długości odcinków, np. promieni. Skonstruowane układy są dynamiczne, uczeń może zmieniać odległości punktów, zmieniając położenia obiektów.

B. Samouczek

Użytkownik może wybrać z listy konkretny układ dwóch obiektów (dwóch prostych, prostej i okręgu, dwóch okręgów), np.: proste prostopadłe, prosta styczna do okręgu, okręgi styczne



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



wewnętrznie itd. Wówczas odtwarza się animacja obrazująca dany układ z naniesionymi istotnymi wymiarami determinującymi dany układ. Obok grafiki pojawiają się odpowiednie zależności zapisane algebraicznie. Całość opatrzona jest nagraniem lektora, który omawia daną zależność. np. w przypadku okręgów stycznych zewnętrznie pojawiają się dwa okręgi styczne zewnętrznie z naniesionymi środkami i promieniami wychodzącymi z punktu styczności okręgów. Oznaczone są środki okręgów i ich promienie, dodatkowo wyróżnione są kolorem. Obok pojawia się zależność $|S_1S_2|=r_1+r_2$ oraz słysząc odpowiedni komentarz lektora.

C. Sprawdź się

Uczeń może wybrać z listy konkretny układ dwóch obiektów (dwóch prostych, prostej i okręgu, dwóch okręgów), np.: proste prostopadłe, prosta styczna do okręgu, okręgi styczne wewnętrznie itd. albo może wskazać wybór losowy. Wówczas pojawia się do wykonania jedno z kilku poleceń związanych z danym układem (łącznie 30 poleceń) np.:

- na ekranie jest dana prosta k i punkt A oraz polecenie "Skonstruuj prostą prostopadłą do prostej k przechodzącą przez punkt A ";
- na ekranie pojawia okrąg o środku w punkcie A i promieniu $r=5$ oraz polecenie "Skonstruuj okrąg styczny wewnętrznie do danego okręgu o promieniu $R=3$ ".
- na ekranie pojawia się konstrukcja okręgów przecinających się. Jeden okrąg ma środek w punkcie A i promień $r=8$, drugi ma środek w punkcie B takim, że $|AB|=3$ oraz polecenie "Uzupełnij luki, tak aby okręgi przecinały się oraz pola do wypełnienia $______ < R < ______$ ".

Automat sprawdza poprawność wykonanych konstrukcji. Użytkownik w każdej chwili może też uzyskać podpowiedź do danego polecenia, w szczególności może wrócić do samouczka.

Etiuda 2. Kąty w kole

A. Samodzielne konstrukcje

Użytkownik ma dostęp do podstawowych narzędzi konstrukcyjnych. Ma możliwość rysowania okręgów po wskazaniu środka i promienia oraz rysowania prostych przechodzących przez dwa punkty. Może wyznaczać proste prostopadłe, równoległe. Narzędzia umożliwiają konstrukcję kątów związanych z okręgiem: wpisanego, środkowego, między styczną i cięciwą (dopisanego).

Możliwość obrazowania na skonstruowanych grafikach kilku rodzajów kątów, dynamicznie wyświetlane miary kątów przy zmianie ich rozwartości. Możliwość wyświetlenia miar wskazanych kątów i dynamicznej obserwacji miar narysowanych kątów przy zmianie ich rozwartości.

B1. Samouczek

Użytkownik może wskazać na liście wyboru jedną z trzech zależności: kąt środkowy i kąt wpisany, kąt wpisany i kąt dopisany, kąt środkowy i kąt dopisany. Wówczas odtwarza się animacja obrazująca dany układ z naniesionymi istotnymi miarami kątów. Obok grafiki pojawiają się odpowiednie zależności zapisane algebraicznie. Całość opatrzona jest nagraniem lektora, który omawia daną zależność.

B2. Dowody

Po wyborze jednej z trzech zależności: kąt środkowy i kąt wpisany, kąt wpisany i kąt dopisany, kąt środkowy i kąt dopisany, pojawia się animacja z dowodem danej zależności wraz z omówieniem przez lektora.

C. Sprawdź się

Uczeń może wybrać jedną z trzech zależności: kąt środkowy i kąt wpisany, kąt wpisany i kąt dopisany, kąt środkowy i kąt dopisany albo może wskazać wybór losowy. Wówczas pojawia się do wykonania jedno z dziesięciu poleceń związanych z danym układem (łącznie 30 poleceń) np.: na ekranie pojawia się grafika z kątami związanymi z okręgiem, podane są niektóre kąty, należy wyznaczyć miary pozostałych wskazanych kątów.

Automat sprawdza poprawność wykonanych konstrukcji. Użytkownik w każdej chwili może też uzyskać podpowiedź do danego polecenia, w szczególności może wrócić do samouczka.

Etiuda 3. Symetrie w układzie współrzędnych

A. Samodzielne konstrukcje

Użytkownik ma dostęp do podstawowych narzędzi konstrukcyjnych. Ma możliwość konstruowania punktów w symetrii osiowej i środkowej do danych punktów. Może również wskazywać obiekty i oś lub środek symetrii, uzyskując obraz obiektu. Możliwość wprowadzania obiektów takich jak



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



wielokąt, koło. Wskazywanie środka symetrii lub osi symetrii. Obserwacja obrazu figury. Skonstruowane obiekty są dynamiczne, można przemieszczać obiekty na ekranie, np. za pomocą "chwytania" za punkty.

Na etapie szkoły podstawowej konstrukcje wykonywane są na płaszczyźnie.

Dla szkoły ponadpodstawowej konstrukcje mogą zostać wprowadzone w układ współrzędnych. Wówczas pojawiają się współrzędne przy wskazywanych punktach i ich obrazach.

B. Samouczek

Użytkownik może wybrać z listy: symetria osiowa, symetria środkowa, symetria względem początku układu współrzędnych, symetria względem osi Ox, symetria względem osi Oy, symetria osiowa w układzie współrzędnych, symetria środkowa w układzie współrzędnych. Wówczas odtwarza się animacja obrazująca daną symetrię w oparciu o punkty z naniesionymi kluczowymi informacjami. Całość opatrzona jest nagraniem lektora, który omawia daną zależność.

W przypadku symetrii w układzie współrzędnych omówienie zawiera ogólny opis współrzędnych obrazów punktów w zależności od współrzędnych punktów wyjściowych i współrzędnych środka lub równania osi symetrii.

C. Sprawdź się

Uczeń może wybrać z listy konkretny rodzaj symetrii j.w. Wówczas pojawia się do wykonania jedno z kilku poleceń związanych z danym wyborem (łącznie 30 poleceń) np.:

- na ekranie dana jest figura f, oś symetrii k oraz kilka wariantów obrazów i polecenie "Wskaż obraz figury f w symetrii osiowej względem osi k";

Etiuda 4. Wzory skróconego mnożenia

Animacja obrazuje graficzną interpretację wzorów skróconego mnożenia: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2 w oparciu o kwadraty i prostokąty o bokach a, b, $(a+b)$, $(a-b)$.

Dynamiczne grafiki są wzbogacone o zapisy algebraiczne oraz o omówienie lektora.

Użytkownik ma możliwość ingerencji w animację i płynną zmianę długości odcinków "a" i "b".

Możliwość pokazywania i ukrywania opisów/oznaczeń na rysunku i wzorów uzupełniających.

Etiuda 5. Uzasadnienie twierdzenia Pitagorasa

Trzy animacje obrazujące trzy wybrane graficzne uzasadnienia twierdzenia Pitagorasa wraz z zapisami algebraicznymi i komentarzem lektora. Użytkownik ma możliwość zmiany wymiarów trójkąta prostokątnego. Możliwość pokazywania i ukrywania opisów/oznaczeń na rysunku i wzorów.

Kluczowe wymagania merytoryczne i dydaktyczne dla Wykonawcy materiału, które muszą zostać uwzględnione

W etiudach 1-3 dostępne narzędzia umożliwiają w klarowny sposób wykonanie omawianych konstrukcji. Konstrukcje są dynamiczne. Koniecznym jest stworzenie możliwości zmiany kolorów punktów, linii, zmiany wielkości punktów, grubości linii.

Omawiane przez lektora zagadnienia opatrzone są dynamicznymi konstrukcjami.

W etiudach 4 i 5 użytkownik musi mieć możliwość poruszania (zmiany wymiarów) obiektów graficznych w animacji.

Opis struktury materiału

Na starcie uczeń wybiera etiudę z podanej listy. W zależności od wyboru otrzymuje stosowny zestaw narzędzi.

Etiuda 1. Proste i okręgi

Możliwość wyboru jednej z opcji: *Samodzielne konstrukcje*, *Samouczek*, *Sprawdź się*.

W oknie *Samodzielne konstrukcje* dostępne powinny być narzędzia umożliwiające konstrukcje opisane w szczegółowym opisie. Dostępne są również makra, w postaci gotowych sytuacji. Uczeń wówczas może zmieniać wymiary i położenia obiektów na danych konstrukcjach.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



W przypadku animacji z samouczka, np. analizując wzajemne położenie prostej i okręgu, na grafice widoczny powinien być odcinek wskazujący odległość środka okręgu od prostej oraz promień okręgu. Obok powinny pojawiać się zapisy algebraiczne opisujące zależność między długościami tych odcinków i opis wzajemnego położenia prostej i okręgu. Podobnie w przypadku dwóch okręgów. Na rysunku okręgi powinny mieć opisane środki i promienie, a obok rysunku powinna pojawiać się zapisana algebraicznie zależność wynikająca z położenia okręgów na rysunku opisana odległością środków i długościami promieni oraz opis, jak nazywa się dane położenie okręgów. Sytuacja zmienia się dynamicznie przy zmianie promienia okręgu lub położenia środka.

W oknie sprawdź się uczeń może wybrać sam sytuację lub może skorzystać z opcji losowej.

Etiuda 2. Kąty w kole

Możliwość wyboru jednej z opcji: *Samodzielne konstrukcje*, *Samouczek*, *Dowody*, *Sprawdź się*.

W oknie *Samodzielne konstrukcje* można skonstruować różne rodzaje kątów związanych z okręgiem, można skorzystać z gotowych makr dla wskazanego okręgu i wskazanych punktów. Przy wskazanych kątach można wyświetlać ich miarę. Możliwość "ruszania" punktami i dynamicznego śledzenia zależności pomiędzy skonstruowanymi kątami.

W oknie *Samouczek* oraz *Dowody* pojawiają się gotowe animacje z omówieniem przez lektora.

W oknie *Sprawdź się* uczeń może wybrać sam sytuację lub może skorzystać z opcji losowej.

Etiuda 3. Symetrie w układzie współrzędnych

Możliwość wyboru jednej z opcji: *Samodzielne konstrukcje*, *Samouczek*, *Sprawdź się*.

W oknie *Samodzielne konstrukcje* dostępne powinny być narzędzia umożliwiające konstrukcję obrazów punktów w symetrii osiowej i środkowej. Możliwość wyświetlania obrazów wskazanych obiektów przy wskazaniu osi lub środka symetrii. Dynamiczna zmiana obiektów przy ruchu punktami. Przy wskazanych punktach powinny wyświetlać się ich współrzędne. Uczeń ma możliwość wykonywania wspomnianych konstrukcji również w układzie współrzędnych, w szczególności w symetrii względem osi ox , oy i punktu $(0,0)$.

Etiuda 4. Wzory skróconego mnożenia

Gotowa animacja prezentująca graficzną interpretację wzorów skróconego mnożenia. Możliwość ingerencji ucznia w zmianę wielkości a i b (jako długości odcinków). Możliwa zmiana kolorów poszczególnych obszarów na rysunku.

Uczeń ma gotową sytuację, może poruszać obiektami i zmieniać ich wielkości, kolory. Może uruchomić animację z lektorem, który objaśnia uzasadnienie.

Etiuda 5. Uzasadnienie twierdzenia Pitagorasa

Gotowa animacja prezentująca graficzne uzasadnienie twierdzenia Pitagorasa. Możliwość ingerencji ucznia, w zmianę długości przyprostokątnych a i b trójkąta prostokątnego. Możliwość wskazywania na poszczególnych obszarach grafiki algebraicznego zapisu pól powstałych figur (kwadratów i prostokątów) oraz długości poszczególnych odcinków w zależności od a i b . Możliwa zmiana kolorów poszczególnych obszarów na rysunku.

Uczeń ma gotową sytuację, może poruszać obiektami i zmieniać ich wielkości, kolory. Może uruchomić animację z lektorem, który objaśnia dowód.

Mechanika materiału

Ogólne zasady mechaniki:

- Użytkownik ma dostęp do zestawu narzędzi konstrukcyjnych, takich jak:
 - zaznaczanie punktów, rysowanie odcinków, prostych, okręgów
 - mierzenie długości i kątów
 - dynamiczne manipulacje: przesuwanie punktów, zmiana długości odcinków, rozwartości kątów, kształtu figur.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



- Każdy element konstrukcji jest dynamiczny i zmienia się w czasie rzeczywistym w odpowiedzi na działania użytkownika.
- W interfejsie dostępne są:
 - suwaki do precyzyjnej zmiany parametrów (np. promieni, długości odcinków)
 - przyciski do ukrywania i pokazywania wybranych elementów konstrukcji (np. miary kątów, opisy)
 - etykiety obok figur i punktów pokazujące miary i współrzędne w czasie rzeczywistym.

Mechanika dla poszczególnych Etiud

Etiuda 1: Proste i okręgi

- Tworzenie i manipulacja obiektami:
 - Użytkownik może wprowadzać proste przechodzące przez dwa wskazane punkty oraz zmieniać położenie punktów.
 - Możliwość tworzenia okręgów przez wskazanie środka i punktu na obwodzie.
 - Konstrukcja prostych prostopadłych przechodzących przez dany punkt (ręcznie lub za pomocą makra).
- Dynamiczne miary:
 - Odległości między punktami są wyświetlane na bieżąco w czasie rzeczywistym.
 - Przyciski umożliwiające ukrywanie/pokazywanie dodatkowych elementów konstrukcji.
- Makra wspomagające konstrukcje:
 - Narzędzia automatyzujące skomplikowane konstrukcje, takie jak symetralna odcinka czy rysowanie prostopadłych.

Etiuda 2: Kąty w kole

- Tworzenie i manipulacja obiektami:
 - Rysowanie kątów wpisanych, środkowych i opisanych z możliwością zmiany miar za pomocą suwaków lub przeciągania punktów.
 - Możliwość dodawania punktów wspólnych obiektów, np. środka odcinka, symetralnej, dwusiecznej kąta.
- Dynamiczne miary:
 - Miary kątów są aktualizowane w czasie rzeczywistym.
 - Przyciski do ukrywania/pokazywania miar kątów i wizualizacji konkretnych rodzajów kątów.
- Wizualizacja zależności geometrycznych:
 - Rysunki są dynamiczne, co umożliwia płynną obserwację zależności między miarami różnych kątów w kole.

Etiuda 3: Symetrie w układzie współrzędnych

- Tworzenie i manipulacja obiektami:
 - Wprowadzanie obiektów geometrycznych (np. wielokątów, kół) poprzez podanie współrzędnych lub interaktywne wskazanie w układzie współrzędnych.
 - Ustawianie osi symetrii (podanie równania prostej) lub środka symetrii (podanie współrzędnych).
- Dynamiczne wizualizacje:
 - Automatyczne generowanie obrazu figur w symetrii osiowej i środkowej.
 - Obok każdej figury wyświetlane są współrzędne punktów oraz ich obrazów.
- Precyzyjne sterowanie:
 - Użytkownik może przesuwać punkty, zmieniać kształty figur oraz obserwować zmiany współrzędnych w czasie rzeczywistym.

Etiuda 4: Wzory skróconego mnożenia

- Dynamiczna konstrukcja:
 - Prostokąty i kwadraty są automatycznie generowane na podstawie wartości podanych za pomocą suwaków.
 - Zmiany parametrów (np. długości boków) automatycznie aktualizują zapis algebraiczny i graficzny.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



- Ukrywanie i pokazywanie elementów:
 - Przyciski umożliwiają włączanie/wyłączanie opisów i kolejnych etapów zapisu algebraicznego.
- Kolorowanie elementów:
 - Użytkownik może zmieniać kolory poszczególnych obszarów, aby lepiej zrozumieć powiązania między elementami geometrycznymi a algebraicznymi.

Etiuda 5: Uzasadnienie twierdzenia Pitagorasa

- Dynamiczna manipulacja:
 - Trójkąty prostokątne i pola kwadratów na ich bokach zmieniają się w czasie rzeczywistym w odpowiedzi na ruch punktów lub zmiany wartości na suwakach.
- Ukrywanie i pokazywanie etapów:
 - Przyciski umożliwiają włączanie i wyłączanie kolejnych etapów uzasadnienia (np. pokazanie pól figur, zapisów algebraicznych).
- Obserwacja zależności geometrycznych i algebraicznych:
 - Użytkownik może płynnie śledzić zależności między długościami boków trójkąta a obszarami pól kwadratów, co pozwala na intuicyjne zrozumienie twierdzenia Pitagorasa.

Grafika

Estetyka

- Grafika inspirowana znanymi narzędziami edukacyjnymi i aplikacjami geometrycznymi (np. Geogebra, Desmos).
- Kolorystyka ograniczona do maksymalnie 4–5 kolorów, dobranych pod kątem czytelności i kontrastu.

Elementy graficzne:

- Płaszczyzna robocza: Widok siatki geometrycznej lub układu współrzędnych jako tła, z opcją wyświetlania/ukrywania osi i punktów odniesienia.
- Figury geometryczne: Proste linie, okręgi, punkty, które można przesuwając i manipulować dynamicznie (np. zmiana promienia okręgu poprzez przeciąganie punktu).
- Interaktywne wskaźniki: Punkty konstrukcyjne, linie pomocnicze oraz oznaczenia, które zmieniają się w czasie rzeczywistym przy manipulacjach użytkownika.

Interaktywność:

- Elementy interaktywne (np. punkty, odcinki, kąty) reagują na działania użytkownika (przeciąganie, kliknięcie) w sposób płynny.
- Wartości miar geometrycznych (np. długości, kąty) wyświetlane jako etykiety dynamiczne obok odpowiednich elementów.
- Przyciski akcji (np. „Sprawdź”, „Resetuj”, „Podpowiedź”) zaprojektowane jako proste ikony z tekstem.

Symulacje i tutoriale:

- Schematy geometryczne w tutorialach przedstawione w sposób uproszczony, np.:
 - proste i okręgi jako schematyczne linie i figury w pastelowych kolorach.
 - kąty w kole z oznaczeniami kąta wpisanego, środkowego itp.
 - wzory skróconego mnożenia jako prostokąty i kwadraty z etykietami.
- Animacje w tutorialach – zmiany położenia punktów, przesuwanie prostych,



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



wypełnianie obszarów w sposób płynny.

Responsywność i uniwersalność:

- Układ graficzny dopasowany do różnych urządzeń (komputery, tablety). Wszystkie elementy graficzne powinny skalować się odpowiednio do rozdzielczości bez utraty czytelności.
- Możliwość dostosowania rozmiarów figur geometrycznych i tekstów na płaszczyźnie roboczej.

Parametry personalizacji:

- Użytkownik może zmieniać kolory figur (np. prostokątów w „Wzorach skróconego mnożenia”) lub włączać/wyłączać wyświetlanie osi, siatki i oznaczeń.
- Nauczyciel może ustawić początkowe parametry grafiki (np. długości odcinków, kąty), co pozwala na dostosowanie zadań do indywidualnych potrzeb.

Kluczowe elementy wizualne dla poszczególnych Etiud

Etiuda 1: Proste i Okręgi:

- Okręgi przedstawione jako wyraźne, cienkie linie z możliwością dynamicznej zmiany promienia poprzez przesuwanie punktów.
- Proste wizualizowane jako linie przecinające całą płaszczyznę.
- Kąty oznaczone łukami z dynamicznie zmieniającymi się wartościami.

Etiuda 2: Kąty w Kole:

- Okręgi z zaznaczonymi punktami konstrukcyjnymi, kąty oznaczone łukami w różnych kolorach.
- Etykiety wskazujące miary kątów w czasie rzeczywistym.

Etiuda 3: Symetrie w Układzie Współrzędnych:

- Figury geometryczne w układzie współrzędnych, z osiami symetrii i punktami środka oznaczonymi cienkimi liniami przerywanymi.
- Obrazy figur w symetrii generowane dynamicznie po przesunięciu punktów.

Etiuda 4: Wzory skróconego mnożenia:

- Prostokąty i kwadraty w różnych kolorach, odpowiadające elementom wzoru.
- Możliwość zmiany wymiarów prostokątów i podgląd odpowiadających wartości algebraicznych.

Etiuda 5: Uzasadnienie twierdzenia Pitagorasa:

- Animacje przedstawiające trójkąty prostokątne i pola kwadratów na ich bokach w prostych kolorach.
- Oznaczenia długości boków z dynamiczną aktualizacją po zmianie parametrów trójkąta.

Przykładowe inspiracje

GeoGebra

Co czerpać?

- Zaawansowane narzędzia do dynamicznych konstrukcji geometrycznych.
- Możliwość analizowania zależności geometrycznych poprzez interaktywne rysowanie.
- Obsługa równań i układów współrzędnych w geometrii analitycznej.

Desmos Geometry

Co czerpać?

- Intuicyjny edytor figur geometrycznych – łatwa obsługa dla uczniów, możliwość przeciągania punktów.
- Dynamiczna wizualizacja przekształceń – użytkownik może eksperymentować ze zmianą



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



- położenia figur.
- Przyjazny interfejs do nauki geometrii bez skomplikowanych narzędzi.

Cabri Geometry

Co czerpać?

- Zaawansowane makra do konstrukcji geometrycznych – np. automatyczne wyznaczanie symetralnych, środków ciężkości itp.
- Interaktywne analizy figur geometrycznych – użytkownik może testować zależności między elementami konstrukcji.

Geometer's Sketchpad

Co czerpać?

- Manipulacja figurami geometrycznymi w czasie rzeczywistym.
- Możliwość dynamicznego rysowania i sprawdzania zależności między elementami.

4. Wymagania WCAG

Opis dostosowania materiału celem spełnienia standardu WCAG

Zaawansowany e-materiał musi uwzględniać założenia uniwersalnego projektowania w edukacji (UDL) oraz być zgodny ze standardami dostępności cyfrowej WCAG obowiązującymi na dzień ogłoszenia naboru, standardem ATAG 2.0 oraz zapisami ustawy z dnia 19 lipca 2019 r. o zapewnianiu dostępności osobom ze szczególnymi potrzebami (Dz. U. z 2019 r. poz. 1696) i ustawy z dnia 4 kwietnia 2019 r. o dostępności cyfrowej stron internetowych i aplikacji mobilnych podmiotów publicznych (Dz.U. z 2019 r. poz. 848). Powinien też uwzględniać dobre praktyki, stosowane w celu zapewnienia wysokiej jakości dostępnych cyfrowo materiałów edukacyjnych.

Użytkownik ze szczególnymi potrzebami, korzystający z przygotowanego zaawansowanego e-materiału, powinien korzystać z mechaniki materiału (menu nawigacyjnego) w taki sam sposób, jak wszyscy użytkownicy. Należy przygotować menu, w którym wybiera on dostosowania materiału do swoich potrzeb. W ramach wybranych dostosowań zaawansowanego e-materiału użytkownik powinien korzystać ze wszystkich zaprojektowanych funkcjonalności. Zaawansowany e-materiał powinien spełniać kryteria dostępu dla technologii dotykowych (np. ekranów dotykowych), dostępności z poziomu klawiatury czy za pomocą zewnętrznych urządzeń wejściowych (np. mysz powiększona), technologii asystujących (np. czytniki ekranu). Poszczególne ułatwienia dostępu oraz ich konfiguracja powinny być dostępne w menu przed uruchomieniem aplikacji. Powinna istnieć również możliwość zapamiętania wybranych przez użytkownika ustawień, tak aby mogła być stosowana przy kolejnych uruchomieniach aplikacji przez użytkownika.

Zaawansowany e-materiał powinien spełniać następujące kryteria:

1. umożliwiać użytkownikowi z różnymi potrzebami korzystać z ułatwień dostępu, na wszystkich poziomach i etapach e-materiału;
2. posiadać instrukcję dla użytkowników z różnymi potrzebami, zawierającą informacje o sposobie korzystania z ułatwień dostępu i mechanizmach poruszania się po menu, przygotowaną za pomocą tzw. prostego języka;
3. posiadać rozwiązania z zakresu dostępności, które pozwalają uniknąć QTE lub działań związanych z łączeniem przycisków (uwzględnia ustawienie pozwalające je uprościć lub pominąć/wyłączyć);
4. umożliwiać korzystanie z wirtualnej klawiatury ekranowej (jeśli materiał tego wymaga), którą można sterować za pomocą myszy lub technologii wspomagających, takich jak wzrok lub przełącznik;



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



5. umożliwiać skorzystanie z pomocy w sytuacjach potencjalnie trudnych, związanych z poruszaniem się po materiale;
6. użytkownik przed skorzystaniem z zaawansowanego e-materiału powinien mieć możliwość zapoznania się tutorialiem objaśniającym, jak korzystać z ułatwień dostępu;
7. mechanika zaawansowanego e-materiału powinna pozwalać na dostęp do wszystkich obszarów interfejsu użytkownika;
8. zaawansowany e-materiał powinien być dostępny za pomocą technologii asystujących, m.in. czytników ekranu, oprogramowania asystującego w technologiach mobilnych.

Jeżeli w materiale będą występowały treści nieinterpretowalne przez technologie asystujące, wykonawca zobowiązany jest zapewnić alternatywę wchodzącą w e-materiał i stanowiącą integralną całość zaawansowanego e-materiału. Bez konsultacji z ekspertami ORE nie dopuszcza się tworzenia alternatywnego (równoległego rozwiązania) dedykowanego osobom z różnymi potrzebami.

Zaawansowany e-materiał musi uwzględniać między innymi potrzeby osób:

- z ograniczeniami wzroku,
- z ograniczeniami słuchu,
- z ograniczeniami ruchu rąk i mobilności,
- z ograniczeniami możliwości poznawczych (związanymi z np. pamięcią, przetwarzaniem informacji, dysleksją),
- z zaburzeniami neurorozwojowymi i psychicznymi (np. spektrum autyzmu, ADHD, stanami lękowymi, epilepsją),
- z zaburzeniami mowy,
- korzystających z czytników ekranu.

Podczas projektowania e-materiału należy uwzględniać różne potrzeby i możliwości użytkowników ze względu na:

Ograniczenia wzroku:

- stosowanie dobrze kontrastujących kolorów, czytelnych rozmiarów i typów fontów, możliwość zmiany i indywidualnego dopasowania przez użytkownika tych elementów;
- stosowanie zawsze widocznego fokusa (przynajmniej częściowo);
- używanie kombinacji koloru, kształtów i tekstu, niestosowanie znaczenia tylko kolorem;
- umieszczanie przycisków i powiadomień w kontekście;
- stosowanie odpowiedniej wielkości, kolorów i rozmieszczenia elementów interfejsu;
- umożliwienie zmiany kolorów dla osób będących daltonistami;
- umożliwienie zmiany wielkości elementów interfejsu;
- używanie dźwięku przestrzennego i rozróżnialnych dźwięków, różnych w zależności od zdarzeń;
- umożliwienie wyboru wyglądu kursora/celownika, zmiany kształtu, wielkości, koloru, jeśli projektowana mapa interaktywna zakłada bardzo dużo obiektów;
- wyświetlanie istotnych informacji w centrum, na linii wzroku lub możliwość powiększania całości, poszczególnych elementów mapy interaktywnej;
- nawigacja i sterowanie za pomocą klawiatury;
- stosowanie tekstów alternatywnych lub audiodeskrypcji do grafik;
- elementy materiału powinny być duże i łatwe do odróżnienia oraz oddalone od siebie;
- dodanie opisów alternatywnych do obrazów i innych elementów wizualnych, które opisują treści lub funkcje;
- stosowanie dużego kontrastu między istotnymi elementami w materiale;
- użytkownicy niewidomi powinni móc skorzystać z każdej funkcjonalności materiału z poziomu klawiatury.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Ograniczenia słuchu:

- stosowanie prostego języka, niestosowanie figur stylistycznych i idiomów;
- zapewnienie alternatywy tekstowej każdej kluczowej informacji dźwiękowej;
- dodanie napisów i transkrypcji do treści audio i wideo;
- możliwość modyfikacji napisów, zmiana rozmiaru/koloru oraz ich włączania i wyłączania zanim pojawi się dźwięk;
- stosowanie napisów rozszerzonych informujących o dodatkowych dźwiękach i nastroju oraz postaci mówiących;
- stosowanie prostych logicznych i spójnych układów treści;
- zapewnienie możliwości osobnej regulacji dźwięku dla różnych elementów multimedialnych w mapie interaktywnej;
- zastosowanie przełącznika dźwięku mono/stereo w materiałach filmowych i audio (jeśli takie się pojawią w zaawansowanym materiale).

Ograniczenia ruchu rąk i mobilności:

- umożliwienie w menu materiału ustawienia dużych obszarów klikalnych;
- projektowanie obsługi za pomocą klawiatury i mowy;
- unikanie tworzenia dynamicznych treści, wymagających dużego ruchu myszy;
- nieograniczanie czasu otwarcia okien, wykonania zadań;
- zapewnienie alternatywy dla akcji, wymagających równoczesnych czynności (np. klik zamiast przeciągnij i upuść);
- zapewnienie sterowania przy użyciu prostych kontrolerów.
- unikanie stosowania bardzo precyzyjnych ruchów.

Ograniczenia poznawcze oraz zaburzenia neurorozwojowe i psychiczne:

- używanie prostych, stonowanych barw;
- używanie prostego języka, bez stosowania figur stylistycznych i idiomów;
- używanie krótkich zdań i punktowania;
- używanie wyjaśnienia skrótów;
- tworzenie opisowych przycisków;
- budowanie prostych i spójnych układów treści;
- wyrównanie tekstów do lewej i zachowanie spójnego układu;
- niestosowanie dużych bloków ciężkiego tekstu;
- niestosowanie podkreślania słów, niepochylenia tekstu i pisanie wielkimi literami;
- umożliwienie zmiany kontrastu pomiędzy tłem a tekstem;
- niestosowanie ograniczenia czasowego na wykonanie zadania;
- niestosowanie presji czasowej lub związanej z możliwością wykonania tylko jednej próby wykonania zadania.

Ograniczenia związane z korzystaniem z czytników ekranów:

- opisywanie obrazów, stosownie transkrypcji, audiodeskrypcji;
- nieumieszczanie informacji tylko na obrazie lub wideo;
- nadawanie struktury treści i nieoznaczanie jej tylko rozmiarem i rozmieszczeniem tekstu;
- stosowanie liniowego logicznego układu;
- umożliwienie sterowania za pomocą klawiatury;
- tworzenie opisowych łączy.

Powyższe wytyczne są jedynie przykładami potrzeb, jakie powinny zostać spełnione przy projektowaniu zaawansowanego e-materiału. Beneficjent konkursowy powinien zapewnić możliwie największą dostępność dla osób z różnymi potrzebami. Rozwiązania związane z zapewnieniem dostępności osobom z różnymi potrzebami Beneficjent konkursowy powinien konsultować z ekspertami ORE na poszczególnych etapach realizacji projektu



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



konkursowego.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



5. Wymagania funkcjonalne i techniczne

Kluczowe warunki funkcjonalne dla Wykonawców

Aplikacja musi spełniać wymagania określone w dokumencie „Ogólne wymagania funkcjonalne i techniczne dla e-materiałów”.

Rozpoczęcie: Ekran startowy

- Ekran powitalny z wprowadzeniem tekstowym lub filmowym oraz dostępem do instrukcji/pomocy.
- Możliwość wyboru jednej z pięciu etiud:
 - Etiuda 1: Proste i okręgi
 - Etiuda 2: Kąty w kole
 - Etiuda 3: Symetrie w układzie współrzędnych
 - Etiuda 4: Wzory skróconego mnożenia
 - Etiuda 5: Uzasadnienie twierdzenia Pitagorasa.

Realistyczna symulacja i interaktywność

- Symulacje wiernie odwzorowujące zjawiska edukacyjne (np. geometryczne, algebraiczne).
- Dynamiczna manipulacja obiektami: przesuwanie punktów, zmiana długości odcinków, rozwartości kątów.
- Narzędzia rysunkowe umożliwiające konstrukcje geometryczne (np. rysowanie prostych, okręgów, pomiary długości i kątów).
- Zmiana parametrów (np. promienie okręgów, wartości zmiennych) z natychmiastową aktualizacją wizualizacji.

Nawigacja i opcje wyświetlania

- Swobodne przemieszczanie się między różnymi scenariuszami i etiudami.
- Opcje widoku:
 - Widok zewnętrzny (cała konstrukcja).
 - Widok szczegółowy (skupienie na konkretnym elemencie).
- Dynamiczne wyświetlanie miar (np. kątów, długości odcinków, współrzędnych punktów).

Scenariusze i poziomy trudności

- Każda etiuda zawiera różnorodne scenariusze edukacyjne, np.:
 - „Proste i okręgi” – zależności geometryczne.
 - „Kąty w kole” – relacje między kątami.
 - „Symetrie w układzie współrzędnych” – obrazy figur w symetrii.
 - „Wzory skróconego mnożenia” – graficzna interpretacja.
 - „Twierdzenie Pitagorasa” – uzasadnienia graficzne.
- Poziomy trudności:
 - Szkoła podstawowa – konstrukcje na płaszczyźnie.
 - Szkoła ponadpodstawowa – konstrukcje w układzie współrzędnych.
- Makra ułatwiające tworzenie konstrukcji geometrycznych w Etiudach 1-3.

System testowania wiedzy i zadania interaktywne

- Interaktywne realizowanie zadań, w tym:
 1. Konstrukcja układów geometrycznych, wyznaczanie miar kątów, wskazywanie obrazów figur w symetrii.
 2. Wypełnianie brakujących danych w zadaniach.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



- Tryby pracy:
 1. Samodzielne Konstrukcje – rysowanie figur geometrycznych, dynamiczne wizualizacje miar, dostosowywanie parametrów.
 2. Samouczek – animacje z narracją i zapisami algebraicznymi objaśniające zależności geometryczne.
 3. Sprawdź się – rozwiązywanie zadań z automatyczną oceną, wskazówkami i możliwością powtórzenia.

Opis poszczególnych Etiud

Etiuda 1: Proste i okręgi

- Konstrukcja prostych i okręgów, pomiar długości i kątów.
- Animacje wyjaśniające zależności geometryczne.
- Zadania z opcją wyboru scenariuszy (np. styczne, przecinające się proste i okręgi).

Etiuda 2: Kąty w kole

- Konstrukcja kątów wpisanych, środkowych i opisanych.
- Relacje między kątami (np. kąt środkowy i wpisany) prezentowane w animacjach.
- Zadania wymagające wyznaczania miar kątów i analizy zależności.

Etiuda 3: Symetrie w układzie współrzędnych

- Rysowanie obrazów figur w symetrii osiowej i środkowej.
- Wyznaczanie osi i środka symetrii.
- Animacje objaśniające zasady symetrii.

Etiuda 4: Wzory skróconego mnożenia

- Graficzne przedstawienie wzorów skróconego mnożenia z możliwością dynamicznej modyfikacji parametrów.
- Personalizacja grafiki (zmiana kolorów, ukrywanie opisów).

Etiuda 5: Uzasadnienie twierdzenia Pitagorasa

- Trzy animacje ilustrujące graficzne uzasadnienie twierdzenia.
- Dynamiczne modyfikacje długości boków i obserwacja zależności geometrycznych.

Śledzenie postępów i personalizacja

- Śledzenie postępów: Historia działań użytkownika, profilowanie wyników i osiągnięć.
- Personalizacja przez nauczyciela: Tworzenie własnych scenariuszy, dostosowywanie parametrów konstrukcji i elementów graficznych.
- System powinien umożliwiać użytkownikowi zapisanie i wczytanie własnych konstrukcji geometrycznych, co pozwala na powrót do wcześniejszych prac i analizowanie wyników długoterminowych.

Kluczowe warunki techniczne dla Wykonawców

Aplikacja musi spełniać wymagania określone w dokumencie „Ogólne wymagania funkcjonalne i techniczne dla e-materiałów”.

Raportowanie i statystyki:

- System raportowania wyników dla nauczycieli: Funkcja umożliwiająca nauczycielom monitorowanie wyników i postępów uczniów w ćwiczeniach i zadaniach związanych z symulacją.
- Podsumowanie wyników dla użytkownika: Po zakończeniu sesji użytkownik powinien mieć możliwość przeglądania swoich wyników, co wspiera proces nauki i identyfikacji obszarów wymagających powtórzenia.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską

